單元 A9：二元及三元線性方程組

特定目標：

1. 利用高斯消去法解線性方程組。
2. 認識解的存在性及唯一性。

內容	時間分配	教學建議
9.1 高斯消去法及梯陣式	5	適合下列兩個性質的矩陣稱為梯陣式： (1) 首 k 行非零；其餘各行為零。 (2) 每一非零行的第一個非零元素為 1，並出現在前一行第一個非零元素的右列。 *例*： 以下 5×8 矩陣是梯陣式： $\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 學生應懂得利用高斯消去法解二元及三元的線性方程組，方法就是利用行的基本運算將一矩陣變為梯陣式。 *例*： 解方程組 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2 \\ 3x_1+x_2-2x_3=1 \\ 4x_1-3x_2-x_3=3 \\ 2x_1+4x_2+2x_3=4 \end{cases}$ 增廣矩陣 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
9.2 解的存在性及唯一性	5	原方程組與下列方程組等價 $\begin{cases} x_1 \quad\quad - x_3 = 0 \\ \quad x_2 + x_3 = 1 \\ \quad\quad\quad x_3 = 1 \end{cases}$ 由此可得 $x_1 = 1$， $x_2 = 0$， $x_3 = 1$。 學生應知道二元或三元線性方程組的解的存在性及唯一性條件。 對於二元線性方程組： $a_1x + b_1y = d_1$ $a_2x + b_2y = d_2$ (i) 若 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$，方程組有唯一解。 幾何上，方程組代表一對相交的直線。 (ii) 若 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$ 及 $\det\begin{pmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$， 方程組無解。幾何上，方程組代表一對平行（而不重合）的直線。 (iii) 若 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$ 及 $\det\begin{pmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$， 方程組有無窮多解。幾何上，方程組代表一對重合的直線 教師應與學生討論一些如下列的三元方程組例子。當學生掌握了三維座標幾何的意義後，其幾何解釋可加以討論。 (i) 在解方程組 $\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 5x - 4y + 7z = 1 \\ 7x - 3y + 6z = 8 \end{cases}$ 時， 明顯地第三式是多餘的。教師可與學生討論求得解 $x = \frac{29 - 3\lambda}{13}$， $y = \frac{33 + 19\lambda}{13}$， $z = \lambda$ 的方法，其中 λ 是任意數。

42

內容	時間分配	教學建議
	10	(ii) 解不一致方程組如 $\begin{cases} x + y + z \quad = 3 \\ 2x - 3y + 2z = 1 \\ 3x - 2y + 3z = 7 \end{cases}$。 循此路向，可以更抽象形式表示三元線性方程組的解的存在性及唯一性條件。

43

表示刪去的內容