单元 B4：微分法的应用

特定目标：

1. 学习和使用洛必达法则。
2. 学习微分法的应用。

内容	时间分配	教学建议
4.1 洛必达法则	4	引入以下待定型的极限： $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$， 0^0，∞^0，1^∞。 首先宜展示上述形式出现的例子。教师应讲解洛必达法则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 以处理 $\frac{0}{0}$ 及 $\frac{\infty}{\infty}$ 待定型的极限。以下例题可作考虑： 1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\cos^2\pi x}{e^{2x}-2ex}$ 2. $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\ell n\sin(x-a)}{\ell n\tan(x-a)}$ 教师应强调必须先简化 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 然后才计算极限，而此过程可不断重复直至 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(m)}(x)}{g^{(m)}(x)}$ 已定型。至于其它待定型的极限，可引入例题以展示该等极限可转化为待定型 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的样子，使可应用洛必达法则。以下例题可作考虑： 1. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\cot x)$ 2. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$

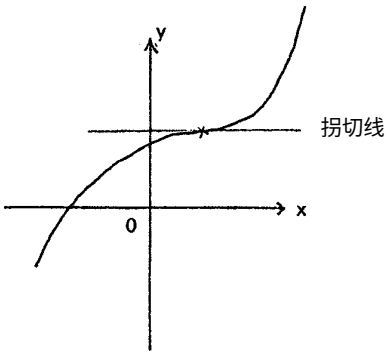
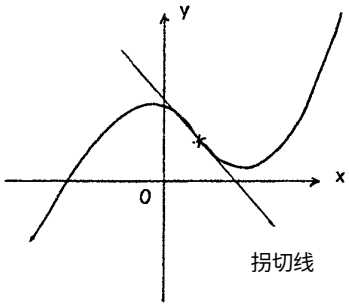
62

内容	时间分配	教学建议
		3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$ 而洛必达法则的证明则不包括在内。
4.2 变率	3	借着一些常用的量，如速度和加速度等，引入并详细讨论 $\frac{dy}{dx}$ 作为 y 对于 x 的变率。 可考虑以下例题： 1. 一雪球溶化时，其体积以恒速度x cm^3/s.减少。当其半径为a cm时。求其 (a) 半径的变率； (b) 表面面积的变率。 2. 一移动中的质点与一定点在时间 t 的位移 x 为 $x = a\sin t + b\cos t$。 (a) 求该质点在时间 t 的速度和加速度，并描述其运动。 (b) 证明在时间 t，其速度可表明为 $\sqrt{a^2+b^2-x^2}$ 。
4.3 单调函数	2	作为开始，教师可引述以下直观且显而易见的结果： 若 $f'(a)>0$，则对所有小过但充份接近 a 的 x 值 f(x) < f(a)，及对所有大过但充份接近 a 的 x 值 f(x) > f(a)。 从几何的角度看，以上结果可引伸至此语句 ：当 x = a 时 f(x)是严格地递增。(注意 ： 讨论中的函数是连续和可导的。)相似的描述亦可用于当 x = a 时，f (x)是严格地递减的。 由此，单调递增的概念可被表达如下： 若对所有在该区间的 x 值 $f'(x)>0$，则 f(x)在该区间内为一单调递增的函数。 教师应引导学生得出以下重要结果： 若在区间 (a，b)内，$f'(x)>0$、函数 f(x)在 x = a连续及 $f(a)\geq 0$，则 f(x)在该区间内便为正数。 单调递减函数的处理亦可用相同方法处理，学生可提供类似的描述。 以上结果在证明一些如下的不等式时有着重要的相关性：

63

表示删去的内容

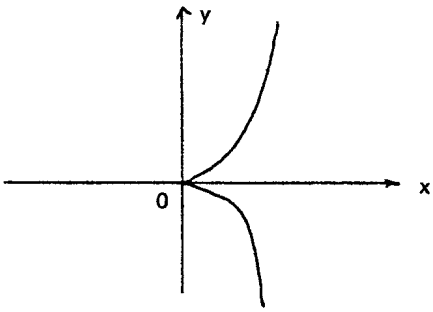
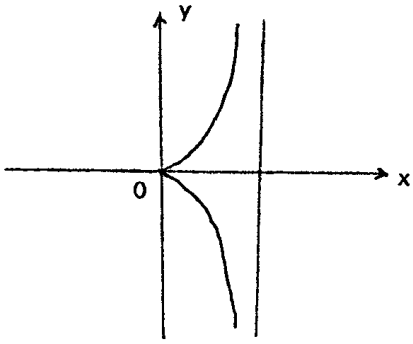
内容	时间分配	教学建议
		(i) $(1+x)^{\alpha} \le 1+\alpha x$ ，对 $0<\alpha<1$及 $x \ge -1$ (ii) $(1+x)^{\alpha} \ge 1+\alpha x$ ，对 $\alpha<0$或 $\alpha>1$及 $x \ge -1$ (iii) $\sin x > x - \frac{x^3}{3!}$ ，对 $x>0$
4.4 极大和极小	5	借着引入曲线的斜度的定义，教师应解释及强调导数作为曲线的斜度的几何含意。关于此点，教师可一再加强学生对曲线的递增或递减的图像理解。 当学生已熟习以上知识后，教师可引导学生掌握辨认局部极大点及局部极小点(即曲线的转向点)的能力。学生要学习以下关于判断局部极值的情况： 对函数f(x)， (a) 求 a 致使 $f'(a)=0$ 及 (b) 检查 $f''(a)=0$ 的符号或检查在 a的邻域中 $f'(x)$ 的符号改变。 教师应提醒学生以下事项： (i) 局部或相对极值未必为全局或絶对极值； (ii) 转向点可于导数不存在的地方出现，如 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 及 $y=\|x\|$； (iii) 平稳点的导数为零； (iv) $f'(a)=0$ 未能充份地判定 $x=a$ 能给出局部极值，如 $x^3\sin\frac{1}{x}$ 及 x^3。 教师应讨论及示范与以上技巧有关的例题。接着可讨论拐点，常用的方法如下: (a) 求 a 致使 $f''(a)=0$ (b) 检查在 a 的邻域中 $f''(x)$ 的符号改变。 教师应提醒学生以下事项： (i) 于拐点，其导数未必相等于零； (ii) $f''(a)=0$ 未能充份地判定 $x=a$ 能给出拐点，如 x^4 。 因此，一些能展示不同方向的拐切线的图像会有很大的帮助。

内容	时间分配	教学建议
		  最后，对于当函数的定义域扩大或缩小时与其絶对值的关系，教师可加以简单解释。
4.5 曲线描绘	6	本课题开始前，学生先要学习求出曲线上存在着的垂直、水平及斜渐近线。讲解时，教师宜运用例题以作解释。例如：曲线 $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ 。 学生应明白到垂直渐近线可于不连续点出现,然后再学习当 x 趋向无限大时函数的表现，例如 $\frac{x^3}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1}\to x$ 当 x 为充份地大，所以可理解到 $y=x$ 为一渐近线。 在完成本课题时，教师应帮助学生寻找、选取及组织所有有关的数据，以便能有系统地描绘曲线。以下事项值得注意：

表示删去的内容

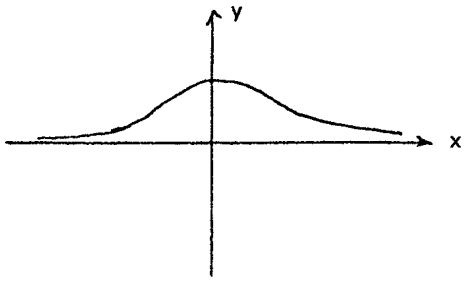
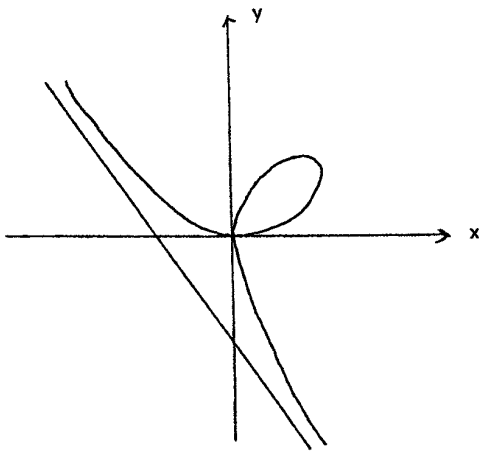
内容	时间分配	教学建议
		(1) 对称于两轴：检查方程以探查对称性 (a) 如无y的奇数幂出现，曲线则对称于 x 轴； (b) 如无x的奇数幂出现，曲线则对称于 y 轴； 例如：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 是对称于两轴。 (2) x 及 y 的值域的限制 例如：(a) 对 $y^2=4x$，x必为非负数，而y则可取所有值。 (b) 对 $x^2y^2=a^2(x^2-y^2)$，可写成 $y^2=\frac{a^2x^2}{x^2+a^2}$，所以x可取所有值；但当写成 $x^2=\frac{a^2y^2}{x^2-y^2}$，明显地 $\lvert y\rvert<a$。事实上，此曲线是包含在渐近线 $y=\pm a$ 内。 (3) 与两轴的截距或任何在曲线上容易见到的点。 例如：对 $y=\frac{x(x+2)}{x-2}$，曲线的 x 截距为 -2 及 0；而曲线仅与 y 轴相交于原点。 (4) 极大、极小及拐点。 (5) 曲线的渐近线。 为了全面的学习这课题，教师在例题中要多提点学生须注意的地方。对于三角函数，学生要注意曲线的周期。至于用参数方程表达的曲线则没有特定要注意的法则，较好的方法就是尽量求得相对的笛卡儿方程然后描绘。 教师应描绘一些能示范以上步骤常见的例子给学生参考。以下例子可作考虑：

66

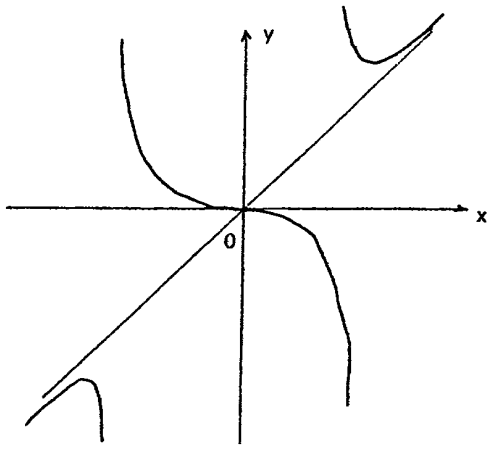
内容	时间分配	教学建议
		1. $y^2=ax^3$  2. $y^2(a-x)=x^3$ 

67

表示删去的内容

内容	时间分配	教学建议
		3. $y=\frac{1}{x^2+a^2}$ 
		4. $x^3-3axy+y^3=0$ 

68

内容	时间分配	教学建议
		5. $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ 
	20	

69

表示删去的内容